MC, 2024

Przesieczanin dowiódł, że $\pi_3(S^2)=Z$

We wrześniu 1930 r. profesor matematyki Hainz Hopf opublikował ważną, dziś klasyczną, pracę pt. „Abbindung der dreidimensionalen Sphäre auf die Kugelflache", czyli „O odwzorowaniach trójwymiarowej sfery w powierzchnię kuli". Praca, zwana jest dziś „niezmienikiem Hopfa"[1]. Najprostsza postać wyniku Hopfa to $\pi_3(S^2)=Z$.

W 2023 r., bywający w Przesiece profesor Uniwersytetu Wrocławskiego Światosław Gal, zwrócił uwagę, że na końcu pracy Hopfa znajduje się adnotacja o miejscu jej publikacji: *Hain im Riesengebirge, September 1930* (Przesieka, wrzesień 1930[2]).

Hainz Hopf urodził się 19 grudnia 1894 r. w podwrocławskiej miejscowości Grabiszyn (dziś osiedle Wrocławia), rozpoczął studia na Uniwersytecie Wrocławskim, które po I Wojnie Światowej skończył na Uniwersytetach w Haidelbergu i Berlinie. W Berlinie obronił dysertację doktorską, zaś habilitację w Getyndze w 1926 r. W momencie publikacji „niezmienika Hopfa" w 1930 r., Hainz Hopf wykładał algebrę na Uniwersytecie w Getyndze, z którego rok później przeniósł się do Politechniki Federalnej w Zurychu, gdzie pracował do 1965 r.

Hainz Hopf musiał nie tylko bywać okazyjnie w Przesiece, ale mieszkać w niej w dłuższym okresie. W bibliotece Uniwersytetu w Getyndze znajduje się bowiem list Hopfa do innego matematyka, Helmuta Hassego z września 1930 r. z adresem zwrotnym *Hain (Riesengebirge), Haus Elisabeth*. W tym samym czasie, (według spisu mieszkańców Hain z 1927 r)[3]. właścicielem Haus Elisabeth w Przesiece (domu przy dzisiejszej ul. Bukowy Gaj 6) był M. Hopf z Wrocławia, czyli ktoś z rodziny profesora. Matka profesora (z domu Kirchner), miała na imię Elżbieta, możliwe więc, że dom został nazwany jej imieniem. Ojcem Hainza był Wilhelm Hopf, co może oznaczać, że w spisie mieszkańców jest literówka i M. Hopf był w rzeczywistości W. Hopfem. To tym bardziej prawdopodobnie, że w księdze mieszkańców przy nazwisku Hopfa znajduje się dopisek „Breslau", gdzie przecież mieszkali rodzice profesora i on sam. W 1943 r. majątek Hopfów został skonfiskowany przez niemieckie władze nazistowskie, ponieważ profesor zaoferował schronienie w Zurychu uciekającym z Niemiec znajomym. Wtedy też Hopf stracił obywatelstwo niemieckie, ale wnet uzyskał szwajcarskie. Niezależnie od tego kto z rodziny Hopfów był właścicielem przesieckiego domu, w którym pracował profesor, pewne jest, że w Przesiece została opublikowana ważna dla matematyki, klasyczna praca „O odwzorowaniach trójwymiarowej sfery w powierzchnię kuli".

Hain Hopf, źródło: https://pl.wikipedia.org/wiki/Heinz_Hopf

[1] https://encyclopediaofmath.org/wiki/Hopf_invariant
[2] https://sci-hub.se/10.1007/BF01457962
[3] http://www.wimawabu.de/adressbuecher/Adressbuecher_1927/Bew_Hain_1927%23.pdf

Über die Abbildungen der dreidimensionalen Sphäre auf die Kugelfläche.

Von

Heinz Hopf in Zürich.

Einleitung.

Unter einer „Abbildung“ eines Komplexes (oder auch einer beliebigen Menge) A „auf“ einen Komplex B verstehen wir stets eine eindeutige und stetige, nicht notwendig eineindeutige, Abbildung von A, bei der die Menge der Bildpunkte zu B gehört. Zwei Abbildungen von A auf B nennen wir zu derselben „Klasse“ gehörig, wenn man sie stetig ineinander überführen kann, d. h. wenn es eine sie enthaltende stetige Schar von Abbildungen von A auf B gibt, und wir bezeichnen eine Abbildung als „topologisch wesentlich“, wenn bei jeder Abbildung der durch sie bestimmten Klasse die Bildmenge aus allen Punkten von B besteht, d. h. wenn es unmöglich ist, durch stetige Abänderung der Abbildung einen Punkt von B von der Bedeckung durch die Bildmenge zu befreien.

Das Hauptziel und -ergebnis dieser Arbeit ist der Beweis von

Satz I. *Die Abbildungen der 3-dimensionalen Sphäre S^3 auf die 2-dimensionale Sphäre S^2 bilden unendlich viele Klassen.*

Da sich jede echte Teilmenge der Kugelfläche S^2 stetig auf einen willkürlichen Punkt der S^2 zusammenziehen läßt, gehören alle topologisch unwesentlichen Abbildungen einer Menge A auf die S^2 zu einer einzigen Klasse. Mithin enthält Satz I den

Satz Ia. *Die S^3 läßt sich topologisch wesentlich auf die S^2 abbilden.*

Darüber, für welche Dimensionszahlen a und b sich ähnliche Aussagen über die Abbildungen der a-dimensionalen Sphäre S^a auf die b-dimensionale S^b machen lassen, ist mir fast nichts bekannt. Trivial sind die Fälle $a < b$, denn dann läßt sich jedes stetige Bild der S^a in der S^b auf einen willkürlichen Punkt zusammenziehen, die Abbildungen bilden also eine einzige

Liegt nun eine Abbildung von A^4 auf eine S^2 vor, so können wir diese S^2 durch die eben beschriebene A^2 realisieren; die Abbildung ist dann eine Abbildung von A^4 auf sich, die den Grad 0 hat, da nur ein echter Teil von A^4 durch die Bildmenge bedeckt wird. Folglich ist nach dem eben genannten Satz auch $u = 0$, also $f(A^2) \sim 0$ in A^4, d. h. $f(A^2) = 0$ auf S^2. Ist Z^2 irgendein Zyklus von A^4, so ist $Z^2 \sim a \cdot A^2$, mithin $f(Z^2) = a \cdot f(A^2) = 0$ auf S^2, d. h. f ist algebraisch unwesentlich.

8. Schließlich sei für den Satz Ia noch ein Beweis angegeben, der auf den Sätzen VII und VIII beruht und von dem in den §§ 1 bis 5 enthaltenen Beweis völlig verschieden ist: A^4 und A^2 haben dieselben Bedeutungen wie in 7., A^3 bezeichne den Komplex der dreidimensionalen Simplexe T_j^3 einer bestimmten Zerlegung von A^4; dann kann man A^2 als in A^3 liegend annehmen, und dort ist A^2 erst recht $\not\approx 0$. Daher kann man nach dem Zusatz zu Satz VII A^3 so auf die S^2 abbilden, daß dabei A^2 algebraisch wesentlich abgebildet wird. Diese Abbildung f läßt sich auf Grund von Satz VIII aber nicht zu einer Abbildung $f(A^4)$ erweitern. Folglich gibt es unter den vierdimensionalen Simplexen T_i^4 von A^4 wenigstens eines, etwa T_1^4, so daß sich die auf dem Rand $\dot{T}_1^4 = S_1^3$ erklärte Abbildung f nicht auf ganz T_1^4 ausdehnen läßt; daraus folgt, daß die Abbildung $f(S_1^3)$ auf die S^2 topologisch wesentlich ist, da andernfalls die Ausdehnung von f auf T_1^4 nach dem im Beweise von Satz VII angewandten Verfahren vorgenommen werden könnte. Damit ist ein indirekter Beweis des Satzes Ia geliefert.

Hain im Riesengebirge, September 1930.

(Eingegangen am 30. 9. 1930.)

Pierwsza i ostatnia strona pracy Hainza Hopfa „O odwzorowaniach trójwymiarowej sfery w powierzchnię kuli”.
Na ostatniej stronie miejsce publikacji - „Hain in Riesengebirge, September 1930.
Źródło: https://sci-hub.se/10.1007/BF01457962

Sortiert nach Namen

Einwohnerbuch 1927

Gemeinde Hain im Kreis Hirschberg/Rsgb

682 Einwohner, Entfernung v. d. Kr. 14 km, A. u. St. Giersdorf, Ag. Hermsdorf., K. u. P. Hain/Rsgb.
Eis. Warmbrunn
Abkürzungen: A.= Amtsbezirk, St.= Standesamtsbezirk, Ag.=Amtsgericht, P.=Postanstalt, Eis.=Eisenb.-Station.

Nr.	Name	Vorname	Beruf/Stand	Straße	Nr.	Bemerkungen
	Haus Beckmann	Bes.	Dr. Heckmann			Breslau
	Haus Bergfrieden	Bes.	Dr. Franke			Apotheker, Lauban
	Haus Elisabeth	Bes.	M. Hopf			Breslau
	Haus Frohsinn	Bes.	Sporonik			Berlin
	Haus Heimfried	Bes.	Freifrau v. Uckermann			Berlin
	Haus Joachimsohn	Bes.	Joachimsohn			Breslau
	Haus Kroß	Bes.	Kaufmann Kroß			Hirschberg
	Haus Lore	Bes.	Frau Tschacher			Gleiwitz
	Haus Malony	Bes.	Frau Malony			Breslau
	Haus Talblick	Bes.	Dr. Mimitz			Berlin
	Pensionat Marthashöhe	Bes.	Frl. Groth			Berlin
	Seenhütte	Bes.	Kaufm. Messenbrink			Senftenberg O.L.
	Silberdistel	Bes.	Generaldirektor Schmidt			Hirschberg
	Villa Marienhöhe	Bes.	Gastwirt Krinszig			Krummhübel
	Villa Rosenburg	Bes.	Hotelbesitzer Bauer			Breslau
1	**Adolf**	Herbert	Konditor			
2	**Adolf**	Leopold	Bäckermeister			
3	**Adolf**	Johann	Stellmacher			
4	**Adolf**	Laura	Bäckermeister-Wwe.			
5	**Baron**	Emil	Logierhausbesitzer			
6	**Beer**	Heinrich	Hausbesitzer			
7	**Binner**	Heinrich	Schuhmacher			
8	**Binner**	Gustav	Hausbesitzer			
9	**Binner**	Heinrich	Hausbesitzer			
10	**Binner**	Julius	Auszügler			

Księga mieszkańców Przesieki (Hain) z 1927 r.
Źródło: http://www.wimawabu.de/adressbuecher/Adressbuecher_1927/Bew_Hain_1927%23.pdf